Exercice N° 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les points $A(-2i)$; $B(4-2i)$; $C(4+2i)$ et $D(1)$.

1) a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

b) Ecrire le nombre complexe ($-4-4i$) sous forme trigonométrique.

2) A tout point $M(\neq A)$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4-2i}{z+2i}$.

a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$, $z'-1 = \dfrac{-4-4i}{z+2i}$

b) Montrer que $DM' \cdot AM = 4\sqrt{2}$

c) En déduire, que si M appartient au cercle de centre A et de rayon 2 alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

4) Montrer que $(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AM}) = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $D_f =]-1,1[$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

d) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α .

b) Vérifier que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

c) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x-\alpha|$.